

Teoretické poznámky k pojmu matematická gramotnosť (štúdia PISA¹)

Vymedzenie pojmu *matematická gramotnosť*

V kurikulu školskej matematiky je obsah vyučovacieho predmetu prezentovaný, učí sa a hodnotí prostriedkami, v ktorých absentuje autentický kontext. Žiakom je napríklad predstavený postup riešenia istého typu rovnice, tí následne tento typ rovníc riešia na domácu úlohu. Po tom, čo sa žiaci naučia príslušné pojmy z aritmetiky, algebry a geometrie, stretávajú sa s vymyslenými matematickými úlohami zameranými na použitie týchto vedomostí. Nepoukazuje sa na úlohu a potrebu využitia matematiky v reálnom svete. Problém reálneho života je potrebné preložiť do podoby, v ktorej sa ukáže dôležitosť a užitočnosť matematiky. Žiaci, ktorí sú vedení k transformácii reálnych problémov do podoby, v ktorej je možné uplatniť matematiku a sú vybavení na použitie svojich matematických vedomostí a zručností počas svojho života, sú matematicky gramotní.

Matematická gramotnosť je schopnosť žiakov použiť svoje matematické poznatky pri ujasnení si problémov reálneho sveta a pri realizácii úloh vyplývajúcich z riešenia takýchto problémov.

Matematická gramotnosť je schopnosť jedinca rozpoznať a pochopiť úlohu matematiky vo svete, robiť zdôvodnené hodnotenia, používať matematiku a zaoberať sa ňou spôsobmi, ktoré zodpovedajú potrebám života konštruktívneho, zaujatého a rozmýšľajúceho občana. (Koršňáková, 2004, s. 7).

Uvedená schopnosť zdôrazňuje použitie matematických vedomostí v množstve rozličných situácií rôznymi spôsobmi. Používanie matematiky sa chápe ako pripravenosť na ďalšie štúdium a estetické resp. rekreačné prvky matematiky. Kľúčovou schopnosťou je schopnosť použiť matematiku pri nastolení, formulovaní, riešení a interpretácii problémov v rôznych situáciách a kontextoch, aj v takých, do ktorých je potrebné zaviesť matematické štruktúry.

Rozlišujeme tri komponenty vyskytujúce sa v úlohách na hodnotenie úrovne matematickej gramotnosti (v štúdiu OECD PISA):

1. **Situácie (kontexty)** – ide o umiestnenie úlohy do kontextu, úlohovej situácie v reálnom svete. Kontext je pre použitie matematiky prirodzený, ovplyvňuje riešenie a interpretáciu

¹ PISA – Programme for International Student Assessment

úlohy. Kontext môže byť aj hypotetický, pretože vysvetľovanie hypotetických scenárov patrí k najsilnejším rysom matematiky.

2. **Matematický obsah** – korešponduje s členením matematických disciplín v kurikule matematiky.
3. **Kompetencie (schopnosti)** – ich aktivácia je potrebná na prepojenie reálneho sveta s matematikou, ktoré vedie k riešeniu problému.

Súčasť matematickej gramotnosti	Situácie (kontexty)	Osobný život (najbližší žiakovi)	Škola, zamestnanie	Voľný čas	Spoločnosť a veda (najabstraktnejší pre žiaka)
	Matematický obsah	Kvantita (numerické javy, kvantitatívne vzťahy a modely, relatívna veľkosť, číselná reprezentácia veličín, počtov a mier, kvantitatívne dôvodenie, význam operácií, počítanie s pamäti, odhady)	Priestor a tvar (priestorové a geometrické javy a vzťahy)	Zmena, vzťahy závislosti (funkčné vzťahy a závislosti medzi premennými, rovnice a nerovnice, ekvivalencia, deliteľnosť, inklúzia...)	Náhodnosť (pravdepodobnostné a štatistické javy)
	Kompetencie (schopnosti)	Reprodukčná úroveň (reprodukcia naučeného materiálu, vykonávanie rutinných výpočtov a procedúr, riešenie rutinných problémov)	Úroveň prepojenia (riešenie nie rutinných úloh, ktoré obsahujú známe prvky. Úlohy vyžadujú schopnosť prepojenia rôznych oblastí matematiky, prácu s viacerými reprezentáciami daného problému. Charakteristická je integrácia, prepojenie, modelovanie, spojenie viacerých známych metód riešenia problému)	Úroveň reflexie (úlohy obsahujú prvok uvažovania o procesoch potrebných k vyriešeniu problému, vzťahujú sa k schopnosti plánovať stratégie riešenia a uplatniť ich v menej zvyčajných úlohách. Charakteristické sú rozvinutým uvažovaním, argumentáciou, abstrakciou, zovšeobecnením, originálnym prístupom a spojením viacerých zložitých metód)	
		<ul style="list-style-type: none"> • Rozmýšľanie a usudzovanie • Argumentácia • Komunikácia • Modelovanie • Položenie otázky a riešenie problému • Reprezentácia • Použitie symbolického, formálneho a technického vyjadrovania a operácií • Použitie nástrojov a prístrojov 			

Matematická gramotnosť je dosahovaná na jednotlivých úrovniach. Definovanie každej úrovne bolo stanovené na základe kognitívnych procesov, vedomostí a zručností požadovaných na riešenie úloh zaradených do jednotlivých úrovní.

<u>1. úroveň:</u>	Myslenie a obťažnosť úloh je na úrovni rutinných operácií. Informácia je zadaná jednoducho a zrozumiteľne. Činnosť žiaka je automatická a bezprostredná. Tieto úlohy nerozvíjajú myslenie.
<u>2. úroveň:</u>	Žiak používa bezprostredné uvažovanie, základné algoritmy, formuly a vie písomne interpretovať svoje výsledky.
<u>3. úroveň:</u>	Žiak vie nájsť jednoduchú stratégiu riešenia problémov. Dokáže spracovať viacdrojové informácie a vytvoriť krátke výsledky a zdôvodnenia.
<u>4. úroveň:</u>	Žiak aktívne pracuje na konkrétnej úlohe, má dobre rozvinuté zručnosti preniknúť do podstaty úlohy, dokáže správne argumentovať.
<u>5. úroveň:</u>	Žiak vie vytvoriť modely zložitých operácií a pracovať s nimi. Vyberá, porovnáva a vyhodnocuje primerané stratégie riešenia problému, dokáže uvažovať o svojich akciách, formulovať a komunikovať svoje interpretácie a dôvodnenia.
<u>6. úroveň:</u>	Žiak vie zovšeobecňovať a využívať informácie na základe svojich výskumov. Formuluje hypotézy a dokazuje ich správnosť. Je schopný pokročilého matematického myslenia a dôvodnenia. Žiak vytvára nové prístupy a stratégie pre riešenie neobvyklých úloh, využíva pritom pochopenie symbolických, formálnych operácií, vzťahov a vhlád do problému. Dokáže precízne formulovať a komunikovať svoje akcie, úvahy, interpretácie a argumentácie vo vzťahu k zisteniam.

Matematizácia ako základná stratégia použitia matematiky je považovaná za základný cieľ vzdelávania. Predstavuje schopnosť žiaka použiť získané vedomosti pri riešení matematických problémov, s ktorými sa stretáva. Možno ju opísať piatimi krokmi:

1. Stanoviť východisko, daný reálny problém.
2. Nájsť vhodné matematické pojmy súvisiace s týmto problémom.
3. Postupne odstraňovať prvky reality a posúdiť, ktoré prvky uvedeného problému sú dôležité, zovšeobecniť a formalizovať ich. Reálny problém sa transformuje na matematický tak, aby hodnoverne reprezentoval situáciu.
4. Riešiť matematicky formulovaný problém.
5. Preložiť riešenie matematického problému do reči reálnej situácie.

Štúdia OECD PISA²

OECD v roku 2000 prvýkrát organizovala najväčší a najdôležitejší medzinárodný výskum výsledkov vzdelávania - štúdiu PISA (Programme for International Student Assessment) spolu v 32 krajinách. V roku 2015 vzrástol počet zúčastnených krajín na 71. Vzorku testovaných žiakov tvorili 15-roční žiaci, pretože v tomto veku sa vo väčšine krajín

² OECD PISA - Organisation for Economic Co-operation and Development), Programme for International Student Assessment

končí povinná školská dochádzka. Testovanie prebieha v trojročných cykloch. Slovensko sa do testovania zapojilo až v druhom cykle v roku 2003.

Základom štúdie je dynamický model celoživotného učenia sa a jej cieľom je zachytiť, ako dobre žiaci obstoja za hranicami učebných osnov. Štúdia PISA zisťuje ako sú 15 roční žiaci na konci povinnej školskej dochádzky pripravení vysporiadať sa s požiadavkami súčasnej informačnej spoločnosti a poskytuje nový pohľad na výkon žiaka. Tiež poskytuje výsledky s vysokým stupňom validity a reliability pomáhajúce lepšie pochopiť výsledky krajín s rôznymi socioekonomickými aj kultúrnymi charakteristikami.

Testovacie nástroje štúdie monitorujú

- čitateľskú gramotnosť,
- matematickú gramotnosť,
- prírodovednú gramotnosť,
- schopnosť riešiť problémové úlohy medzipredmetového charakteru,
- motiváciu žiakov učiť sa,
- presvedčenie žiakov o vlastných schopnostiach,
- štýly učenia sa (PISA 2003 – Národná správa, 2004).

Pod pojmom *gramotnosť* sa rozumie schopnosť žiaka aplikovať vedomosti a zručnosti z kľúčových oblastí vyučovacieho predmetu; schopnosť analyzovať a efektívne komunikovať svoje názory a postoje; schopnosť riešiť a interpretovať problémy v rozličných situáciách. Skúmanie gramotnosti sa vo všetkých testovaných oblastiach zameriava na tri základné aspekty, ktorými sú *obsah a vedomosti, situácie, procesy*. V roku 2003 a 2012 bol cyklus štúdie zameraný na zisťovanie úrovne matematickej gramotnosti testovaných žiakov. PISA sa snaží podnietiť vyučovanie matematiky, ktoré bude klásť dôraz na procesy spojené s riešením problémov v kontexte reálneho života, bude žiakov učiť transformovať tieto problémy do podoby vhodnej pre použitie matematického prístupu, použiť relevantnú matematickú vedomosť na riešenie problému a vyhodnotiť riešenie v originálnom kontexte.

Charakteristika úloh štúdie PISA

„Štúdia PISA sa snaží podnietiť vyučovanie matematiky, ktoré bude klásť dôraz na procesy spojené s riešením problémov v kontexte reálneho života, bude žiakov učiť transformovať tieto problémy do podoby vhodnej pre použitie matematického prístupu, použiť relevantnú matematickú vedomosť na riešenie problému a vyhodnotiť riešenie v originálnom kontexte problému.“ [1]

Na základe situácií a reálnych kontextov úloh sa v štúdiu PISA objavujú zadania, ktoré sú žiakom bližšie, reprezentujú kontext blízky ich skúsenostiam, ale aj zadania, ktoré vyžadujú od žiakov vysokú mieru abstraktného myslenia. Hodnotenie štúdie PISA totiž predpokladá, že žiaci by mali byť schopní narábať so situáciami blízkymi aj vzdialenými od ich bezprostredného života. Iné kritérium zohľadňuje, na koľko je zrejmý matematický charakter situácie. Malý počet úloh sa vzťahuje len na matematické objekty, symboly, štruktúry. Väčšina úloh obsahuje problémy, kde matematické prvky nie sú vyjadrené explicitne. Hodnotenie reflektuje mieru toho, ako je žiak schopný identifikovať matematický problém v nematematickom kontexte, aktivovať matematické vedomosti na skúmanie riešenia tohto problému a porozumieť riešeniu.

Testové položky (otázky) sa viažu k úvodnému motivačnému podnetu (vo forme krátkeho textu, obrázku, tabuľky, grafu). Súbor otázok nadväzujúcich na úvodný podnet tvorí v testovom zošite jednu úlohu, pričom úloha môže obsahovať rôzny počet čiastkových položiek. Testovací zošit pre žiaka tvorí zoskupenie 3-5 úloh z rovnakej oblasti (tzv. blok). Každý z variantov testovacieho zošita pozostáva zo štyroch blokov a každý blok sa nachádza v štyroch variantoch testovacieho zošita. Jeden žiak má tak vo svojom testovacom zošite približne 15 úloh s 55-60 otázkami. V rámci úlohy majú otázky vzrastajúcu úroveň náročnosti. Niekoľko prvých otázok sú položky s výberom odpovede alebo s krátkou, uzavretou odpoveďou. Nasledujú úlohy s otvorenou odpoveďou. Táto nadväznosť umožňuje navrhnúť realistické úlohy odzrkadľujúce zložitost' situácií reálneho sveta. Efektívna je tiež z hľadiska využitia času určeného na testovanie, pretože znižujú čas potrebný na vniknutie do danej situácie.

Ukážky uvoľnených úloh

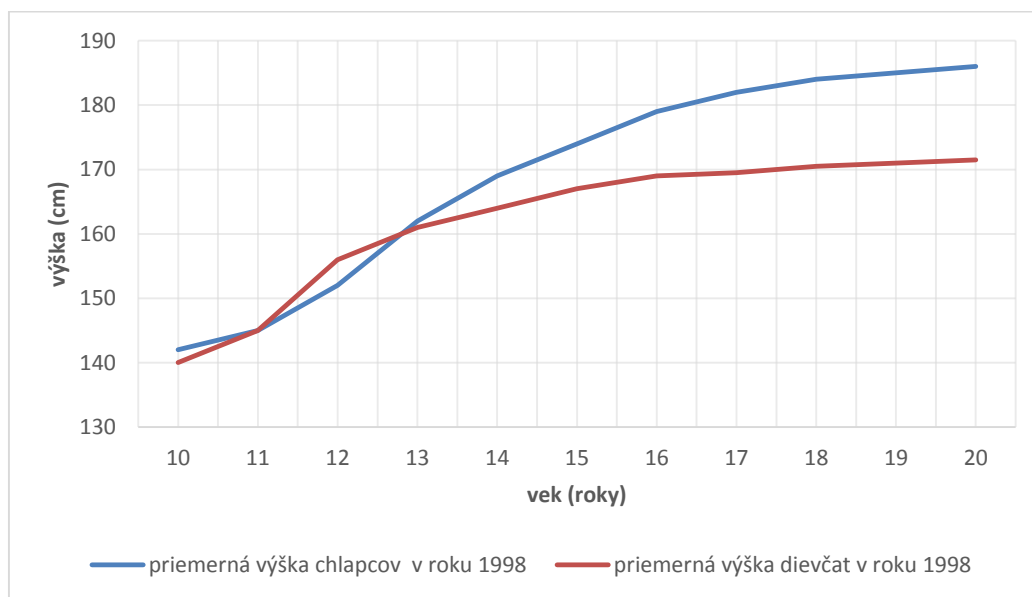
Medzinárodné textovanie gramotnosti OED PISA sa uskutočňuje v trojročných cykloch od roku 2000, kedy bola hlavnou sledovanou oblasťou čitateľská gramotnosť (v ďalšom cykle PISA 2003 to bola matematická gramotnosť a v PISA 2006 prírodovedná gramotnosť). V príslušnom cykle testovania je väčší dôraz kladený na hlavnú sledovanú oblasť, z nej je najvyšší podiel testových položiek (cca polovica). Väčšina úloh sa po testovaní nezverejňuje, pretože prechádzajú do ďalších cyklov, aby bolo možné sledovať trendy v úrovni ich riešenia. Na zverejnenie sa uvoľňuje po hlavnom testovaní len obmedzené množstvo úloh z hlavnej sledovanej oblasti. V roku 2003, keď bola sledovaná úroveň matematickej gramotnosti, bol

podiel matematických úloh 85 položiek z celkového počtu 148 testových položiek. Z toho bolo pre verejnosť uvoľnených 45 testových položiek v 22 úlohách.

V nasledujúcej časti sú prezentované zadania niektorých uvoľnených úloh.

Úloha: VÝŠKA ĽUDÍ

Mladí ľudia dosahujú väčšiu výšku. V grafe je vyznačené priemerná výška mladých chlapcov a dievčat v Holandsku v roku 1998.



- **otázka č. 1:**

Od roku 1980 sa priemerná výška dvadsaťročných dievčat zvýšila o 2.3 cm na 170,6 cm. Aká bola ich priemerná výška v roku 1980?

Odpoveď:cm.

- **otázka č. 2:**

Pomocou grafu urči, v ktorom vekovom období sú dievčatá v priemere vyššie ako rovnako starí chlapci.

Odpoveď:

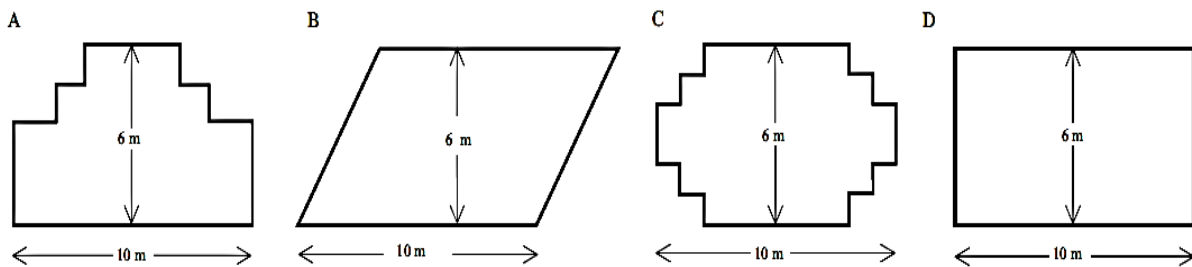
- **otázka č. 3:**

Vysvetlite, ako je v grafe znázornené, že po dosiahnutí 12. roku veku rýchlosť rastu dievčat v priemere klesá.

Odpoveď:

Úloha: TESÁR

Tesár má 32 metrov dreva na ohradenie záhonu v záhrade. Uvažujte o nasledujúcich tvaroch záhonu.



Zakrúžkujte buď ÁNO alebo NIE pri každom tvare záhonu podľa toho, či môže, alebo nemôže byť vytvorený z 32 metrov dreva

Tvar záhonu	Môže byť tvar záhonu vytvorený z 32 metrov dreva?
A	Áno / Nie
B	Áno / Nie
C	Áno / Nie
D	Áno / Nie

Úloha: VÝMENNÝ KURZ

Slečna MEI-Ling zo Singapuru sa pripravuje na trojmesačný výmenný pobyt študentov v Južnej Afrike. Musí si vymeniť singapurské doláre (SGD) na juhoafrické randy (ZAR).

Otázka č. 1:

Mei-Ling zistila, že kurz singapurského dolára voči juhoafrickému randu je:

$$1 \text{ SGD} = 4,2 \text{ ZAR}$$

Mei-Ling si v tomto kurze vymenila 3 000 singapurských dolárov za juhoafrické randy. Koľko juhoafrických randov Mei-Ling mala?

Odpoveď:

Otázka č. 2:

Keď sa Mei-Ling vrátila po troch mesiacoch do Singapuru, zostalo jej ešte 3 900 ZAR. Vymenila si ich naspäť za singapurské doláre a pritom zistila, že kurz sa zmenil a momentálne je:

1SGD = 4,0 ZAR

Koľko singapurských dolárov Mei-Ling dostala?

Odpoveď:

Otázka č. 3:

V priebehu týchto troch mesiacov sa zmenil kurz zo 4,2 na 4,0 ZAR za 1 SGD. Je kurz 4,0 ZAR pri spätnej výmene Juhoafrických randov za singapurské doláre pre MEi-Ling výhodnejší ako kurz 4.2 ZAR? Vysvetlite svoju odpoveď.

Odpoveď:

Úloha: TULEŇ SPÁNOK

Tuleň musí dýchať dokonca aj vtedy, keď spí vo vode. Martin pozoroval tulene po dobu jednej hodiny. Na začiatku jeho pozorovania sa tuleň nachádzal na hladine a nadychoval sa. Potom sa potopil na dno mora a zaspal. Z morského dna vyplával za 8 minút pozvoľna na hladinu a znova sa nadychol. Za tri minúty sa vrátil späť na morské dno. Martin si všimol, že celý tento proces prebiehal veľmi pravidelne.

Otázka:

Po jednej hodine sa tuleň nachádzal

A na dne

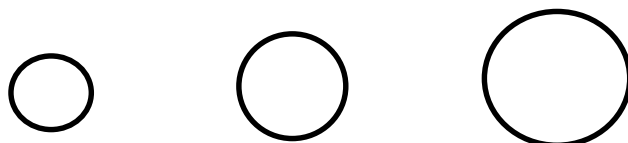
B na ceste k hladine

C na hladine, kde sa nadychoval

D na ceste ku dnu

Úloha: MINCE

Máš navrhnuť novú sadu mincí. Všetky majú byť okrúhle a strieborné, ale rôzneho priemeru. Výskumníci zistili, že ideálna sada mincí má spĺňať nasledujúce požiadavky.



Priemer mincí nemá byť menší ako 15 mm a väčší ako 45 mm. Priemer ďalšej mince musí byť aspoň o 30 % väčší ako priemer mince predchádzajúcej. Raziaci stroj môže vyrábať len mince, ktorých priemer v milimetroch je vyjadrený celým číslom.

Otázka:

Navrhni sadu mincí, ktorá spĺňa predchádzajúce požiadavky. Mal by si začať mincou s priemerom 15 mm a tvoja sada by mala obsahovať čo najviac mincí.

Výsledky testování štúdie PISA

Z analýz výsledkov štúdie z roku 2003 vyplýva, že pre žiakov slovenských škôl sa náročnejšími ukázali byť úlohy

- súvisiace s čítaním a interpretáciou informácií v podobe grafu,
- vyžadujúce argumentáciu,
- vyžadujúce istý vhl'ad do použitých metód,
- súvisiace s používaním a interpretáciou pravdepodobnostných pojmov.

Aj tieto zistenia boli ukotvené v odporúčaníach pre reformu vzdelávacieho obsahu matematiky na primárnom aj sekundárnom stupni vzdelávania.

V poslednom ukončenom testovaní PISA 2012 zameraného na oblasť matematickej gramotnosti žiakov sa štúdie zúčastnilo 65 krajín s celkovým počtom testovaných žiakov 512 343. Zo Slovenska sa testovania zúčastnilo spolu 5 737 žiakov z 231 škôl. 2654 žiakov absolvovalo aj elektronickú formu testovania.

Dosiahnutý priemer žiakov z krajín OECD bol na úrovni 497 bodov, pričom žiaci Slovenskej republiky dosiahli v priemere 482 bodov a umiestnili sa na 23. – 29. mieste medzi krajinami OECD a na 31. – 39. mieste v medzinárodnom porovnaní všetkých zúčastnených krajín. Výkon slovenských žiakov sa nachádza pod priemerom zúčastnených krajín, je však porovnateľný s výkonmi žiakov z krajín ako je Nórsko, Portugalsko, Taliansko, Španielsko, Ruská federácia, USA, Litva, Švédsko, Maďarsko.

Po porovnaní výkonu našich žiakov dosiahnutého v predchádzajúcich cykloch štúdie môžeme konštatovať štatisticky významné zníženie dosiahnutého priemerného skóre. Pri porovnaní výkonov chlapcov a dievčat je zrejmé, že chlapci dosiahli priemerne o 9 bodov vyššie skóre ako dievčatá, hoci dievčatá vykazovali lepšie študijné úspechy v škole.

Zo spracovaných štatistických údajov štúdie vyplýva, že najviac našich žiakov dosahuje výkon na rozmedzí 2. a 3. úrovne matematickej gramotnosti. Výsledky z roku 2012 ale ukazujú významný a alarmujúci nárast počtu žiakov nachádzajúcich sa pod úrovňou 1 oproti priemeru v rámci krajín OECD. Tento nárast predstavuje približne 1,5-krát viac žiakov, ako tomu bolo v roku 2003.

Zastúpenie žiakov na najvyšších úrovniach matematickej gramotnosti má klesajúcu tendenciu oproti predchádzajúcim rokom. Vysoký výkon preukazujú najčastejšie žiaci osemročných gymnázií.

Spracované podľa dokumentov PISA a informácií dostupných na

[1] http://www.nucem.sk/sk/medzinarodne_merania/project/5

[2]

http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/pisa/publikacie_a_diseminacia/3_zbierky_uloh/%C3%9Alohy_-_matematika_2003.pdf

[3]

http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/pisa/publikacie_a_diseminacia/4_ine/Priloha_PISA_2012.pdf